Chương 3
CHUỖI

3.1. Chuỗi số

Mục đích

Bài toán tính giá trị gần đúng của một hàm số tại điểm x_1 gần với điểm x_0 mà giá trị $f(x_0)$ đó biết rất hay gặp trong thực tế: bài toán lập biểu đồ, bài toán nội suy,...Việc tính toán trở nên đơn giản nhờ các phép tính cơ bản +, -, ., / và luỹ thừa khi đó khai triển hàm số thành chuỗi Taylor. Việc biểu diễn một tín hiệu phức tạp thành các tín hiệu đơn giản hoặc các sóng phức tạp thành các sóng đơn giản chính là nhờ vào việc khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier. Để có được cơ sở giải thích cho các bài toán dạng trên cần nắm vững các nội dung của lý thuyết chuỗi.

Trong mục thứ nhất cần nắm vững các khái niệm: hội tụ, phân kỳ của chuỗi số. Luôn luôn ghi nhớ điều kiện cần của sự hội tụ để nhận biết về khả năng phân kỳ của chuỗi số. Khi xem xét các tính chất của chuỗi số hội tụ phải nghĩ ngay xem các chuỗi phân kỳ có tính chất đó không. Điều này hoàn toàn giống như các dãy số hội tụ, các hàm liên tục, các hàm khả vi,... Phải nhận biết số hạng tổng quát của chuỗi số để phân loại được các đặc tính của chuỗi số: chuỗi số dương, chuỗi số đan dấu hay chuỗi số có dấu bất kỳ để từ đó sử dụng các tiêu chuẩn thích hợp để kết luận về sự hội tụ của nó. Đối với chuỗi số dương khi dùng tiêu chuẩn so sánh phải luôn dùng đến chuỗi Riemann[1]. Bên cạnh đó phải nắm vững các tiêu chuẩn D'Alembert[2], tiêu chuẩn Cauchy[3], tiêu chuẩn tích phân Cauchy-Mac Laurin để xem xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương. Đối với chuỗi đan dấu, có định lý Leibnitz, định lý cho ta điều kiện đủ để nhận biết sự hội tụ của nó. Định lý này đóng vai trò rất quan trọng trong việc đánh giá sai số của nhiều bài toán tính gần đúng. Trong định lý này, điều kiện dãy số (a_n) đơn điệu giảm là rất quan trọng, nhiều sinh viên hay bỏ qua điều kiện này. Khi xem xét chuỗi số có số hạng

---

[1] **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (17.9.1826-20.7.1866) là một nhà toỏn người Đức, người đó cú nhiều đúng gúp quan trọng vào ngành giải tớch toỏn học và hỡnh học vi phõn, là người xõy dựng nền tảng cho việc phỏt triển lý thuyết tương đối sau này.

[2] **Jean le Rond d'Alembert** (16.11.1717- 29.10.1783) là một nhà toỏn học, vật lý học, cơ học, triết gia người Phỏp.. Phương phỏp giải phương trỡnh súng của D'Alembert được đặt theo tờn ụng.

[3] **Augustin Louis Cauchy** (đôi khi tên họ được viết **Cô-si**) (21.8.1789-23.5.1857) là một nhà toán học người Pháp. Công trình lớn nhất của ông là lý thuyết hàm số với ẩn số tạp, ông cũng đóng góp rất nhiều trong lĩnh vực toán tích phân và vi phân, ông đã đặt ra tiêu chuẩn Cauchy để nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy trong toán học.

có dấu bất kỳ trước hết nên xét sự hội tụ tuyệt đối của nó vì khi đó có thể lợi dụng được các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương.

Trong mục thứ hai cần nắm vững khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm vì bài toán tìm miền hội tụ của chuỗi hàm là một trong các bài toán cơ bản. Khái niệm hội tụ đều của chuỗi hàm là khái niệm rất khó cũng như khái niệm liên tục của hàm số. Chính vì thế phải đọc kỹ và hiểu chính xác khái niệm này. Nhờ vào sự hội tụ đều của chuỗi hàm mà có thể thực hiện được các phép tính giống như các phép tính về tổng hữu hạn. Điều kiện đủ để nhận biết chuỗi hàm hội tụ đều hay sử dụng là tiêu chuẩn Weierstrass.

Trong mục thứ ba cần nắm vững tính chất đặc biệt về miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa thông qua định lý Abel[4]. Chính vì thế phải thuộc qui tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa. Cần lưu ý cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa cách. Biết cách áp dụng các tính chất của luỹ thừa: phép tính đạo hàm, phép tính tích phân có thể tính được tổng của một số chuỗi hàm. Khai triển Taylor tại lân cận x_0 hoặc khai triển Mac Laurin thực chất là cách biểu diễn hàm số thành chuỗi luỹ thừa. Ý nghĩa thật rõ ràng: một hàm số được biểu diễn qua một đa thức có bậc vô hạn, việc tính giá trị gần đúng của nó thông qua các phép tính +, -, ., /, luỹ thừa. Tuy nhiên phải lưu ý đến điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi luỹ thừa. Cần nhớ khai triển các hàm số thông dụng thành chuỗi McLaurin để từ đó nhờ vào phép đổi biến thích hợp có thể giải quyết các bài toán khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận x_0 mà không phải tính đạo hàm. Chú ý rằng cũng nhờ vào khai triển Taylor mà có thể tính được tổng của một số chuỗi số.

Trong mục thứ tư cần nắm vững công thức tính các hệ số Fourier[5] của hàm số *f(x)*. Nắm vững các dạng chuỗi Fourier: dạng chuỗi lượng giác và dạng phức. Nắm vững các dạng chuỗi Fourier khi hàm số có tính chất đặc biệt: hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn với chu kỳ T. Bên cạnh đó biết cách biểu diễn hàm số đó cho theo các hàm sin hoặc cosin. Phải chú ý đến định lý Dirichlet[6] - điều kiện đủ khai

---

[4] **Niels Henrik Abel** (5.8.1802-6.4.1829), ì một nồ tốn học người Na uy cĩ nhiều ĩng gĩp trong giải tích v̀ ại số, trong ĩ cĩ chứng minh phương trình bậc năm khơng giải ược bằng căn thức.

[5] **Jean Baptiste Joseph Fourier** (21.3.1768-16.5.1830) là một nhà toán học người Pháp. Ông được biết nhiều với việc thiết lập chuỗi Fourier và ứng dụng trong nhiệt học

[6] **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (13.2.1805-5.5.1859) là một nhà toán học người Đức, người được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại của hàm số.

triển hàm thành chuỗi Fourier và vận dụng định lý đó để tính tổng của một chuỗi số.

Các khái niệm

Chương này ta sẽ xét đến lý thuyết các tổng vô hạn: chuỗi. Tuy là một trường hợp riêng của dãy, nhưng vì vai trò và các tính chất đặc thù của nó, nên thường lý thuyết chuỗi được khảo sát riêng. Chương này cũng nêu một số dấu hiệu thường được sử dụng để xét sự hội tụ của chuỗi số.

a) Định nghĩa

Một chuỗi số lập từ dãy số (u_n) là tổng hình thức vô hạn
$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Dãy tổng riêng thứ *n* của chuỗi: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Phần dư thứ *n* của chuỗi $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$
Chuỗi trên gọi là hội tụ về *S* nếu và chỉ nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Khi đó ta nói chuỗi có tổng là *S*, và ký hiệu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S$. Trường hợp ngược lại, nghĩa là giới hạn trên không tồn tại, thì chuỗi gọi là phân kỳ.

Ví dụ 3.1:
a) Xét chuỗi hình học : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$.
Khi $x \neq 1,$ ta có $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Vậy nếu |*x*|<1, chuỗi hội tụ và $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, nếu $|x| \geq 1$, chuỗi phân kỳ.
b) Xét chuỗi điều hòa : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$.
So sánh diện tích miền giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, n]$, ta có

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \geq \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$$

Vậy chuỗi điều hòa phân kỳ.
c) Xét $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$. So sánh từng số hạng ta có

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$\leq 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n}$. Vậy dãy tổng riêng tăng và bị chặn trên nên chuỗi hội tụ.
d) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1$ ... phân kỳ vì dãy tổng riêng là dãy 1-0.

Bài tập: Tính tổng của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Các định lý so sánh

Các định lý sau giúp ta xét sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số dương bằng cách so sánh nó với một chuỗi số mà ta đã biết hội tụ hay phân kỳ .

Định lý 3.1. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, trong đó $u_k \leq v_k$,

$\forall\, n \geq 1.$

- Nếu chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ hội tụ.
- Nếu chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ hội tụ.

(Tuy nhiên để dễ nhớ kết quả của định lý *(3.1)* ta thường phát biểu: nếu chuỗi ″lớn″ hội tụ thì chuỗi ″nhỏ″ hội tụ; nếu chuỗi ″nhỏ″ phân kỳ thì chuỗi ″lớn″ phân kỳ).

Bài tập: Chứng minh định lý trên.

Ví dụ 3.2: Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$, ta có $\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}$, $\forall\, n \geq 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ta có $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, $\forall\, n > 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ta có $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Định lý 3.2. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \sum_{k=1}^{\infty} v_k$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0$ thì hai chuỗi đó cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Bài tập: Chứng minh định lý trên.

Ví dụ 3.3: Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi}{2^n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1 > 0$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi}{2^n}$, hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ (ví dụ trên) nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ phân kỳ.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, khi $n \to \infty$, $e^{\frac{1}{n}} - 1$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n}$. Do đó $\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ tương đương với $\frac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (ví dụ trên) nên chuỗi đó cho hội tụ.

c) Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn cho chuỗi số dương: Giả sử $u_n \geq 0, \forall n$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ khi và chỉ khi dãy tổng riêng bị chặn nghĩa là tồn tại *M*, sao cho $\sum_{k=0}^{n} u_k$, $\forall n$.

Hệ quả. (Điều kiện cần) Nếu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ hội tụ thì $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Chú ý rằng đây là điều kiện cần, điều ngược lại chưa chắc đúng, có nghĩa một chuỗi số dương $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ có $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ nhưng chưa chắc hội tụ. Ví dụ như chuỗi điều hòa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ có số hạng tổng quát dần về 0 nhưng không hội tụ.

-Dấu hiệu D’Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, khi D<1 chuỗi hội tụ, khi D>1 chuỗi phân kỳ.

Chứng minh:

Trường hợp D<1. Vì D<1 chọn ε đủ bé sao cho D+ ε<1. Không mất tính tổng quát ta giả sử ∀n≥1 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon$.

Vậy u_2<$u_1(D + \varepsilon)$,

$u_3 < u_2(D + \varepsilon) < u_1(D + \varepsilon)^2 \ldots$

$u_n < u_1(D + \varepsilon)^{n-1} \ldots$

Vì D+ ε<1 nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_1(D + \varepsilon)^n$ hội tụ, theo định lý so sánh 1 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Bài tập: Chứng minh cho trường hợp D>1.

Ví dụ 3.4:

Xét sự hội tụ của chuỗi số dương

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$, vậy chuỗi hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)(1+\frac{1}{n})^n \frac{1}{n} = e > 1,$$

vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 3.5: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n}$.

Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+(n+1)^2}{3^{n+1}+n+1}}{\frac{2^n+n^2}{3^n+n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Theo dấu hiệu D'Alembert chuỗi hội tụ.

Chú ý: Khi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ chuỗi có thể hội tụ cũng có thể phân kỳ. Ví dụ ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (chuỗi điều hòa) có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$ và đây là một chuỗi phân kỳ, nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ nhưng lại là một chuỗi hội tụ. Tóm lại khi một chuỗi số dương có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ta không thể kết luận hội tụ hay phân kỳ, khi đó ta dùng dấu hiệu khác để xét tính hội tụ của nó.

- *Dấu hiệu Cauchy*

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, khi C<1 chuỗi hội tụ, khi C>1 chuỗi phân kỳ.

Bài tập: Chứng minh dấu hiệu Cauchy.

Ví dụ 3.6: Xét sự hội tụ của chuỗi

$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^n,$

ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+2} = \frac{3}{4}$, vậy chuỗi hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n,$

ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{3n+2} = \frac{4}{3}$, vậy chuỗi phân kỳ.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\, lnn)^n},$

ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ ln\ n} = 0$, vậy chuỗi hội tụ.

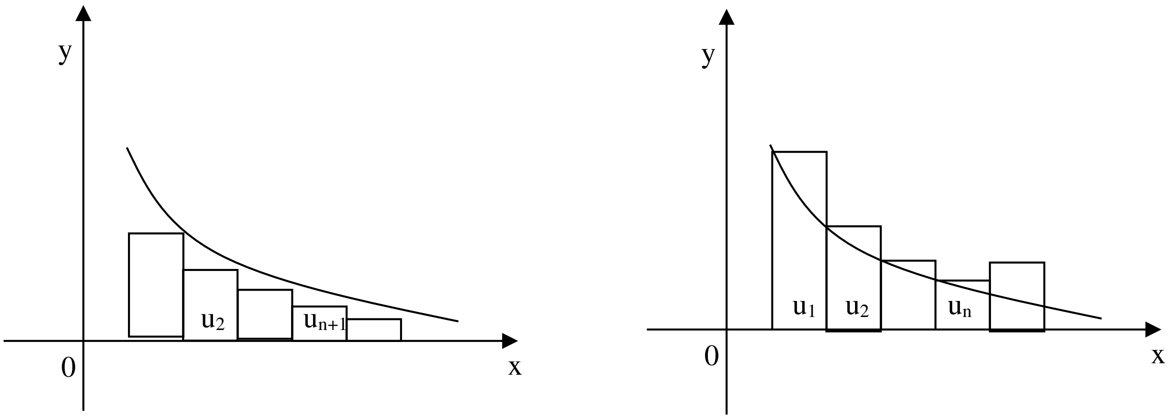
- *Dấu hiệu tích phân*

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu tồn tại hàm *f(x)* liên tục trên $[1, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ và $f(n)=u_n$. Khi đó,

- Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì chuỗi hội tụ;

- Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì chuỗi phân kỳ.

Chứng minh:



Hình 3.1

ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

hay

$$S_{n+1} - u_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$$

Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, ta có $S_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1$, vậy dãy tổng riêng bị chặn nên chuỗi hội tụ.

Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ, ta có $\int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$, vậy dãy tổng riêng không bị chặn nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 3.7: Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (chuỗi Riemann). Với $\alpha \le 0$ $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi phân kỳ. Với $\alpha > 0$, xét hàm $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ thỏa mãn các điều kiện áp dụng dấu hiệu tích phân. Khi $0 < \alpha \le 1$ tích phân $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, phân kỳ nên chuỗi phân kỳ.

Khi 1$< \alpha$ tích phân $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, hội tụ nên chuỗi hội tụ.

d) Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

- Hội tụ tuyệt đối, bán kính hội tụ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, các số hạng u_n có thể dương, hoặc âm. Dãy các tổng riêng thứ *n* của nó chưa chắc là một dãy số tăng, vì vậy nếu dãy số ấy bị chặn trên không có nghĩa là tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n$, nên chuỗi chưa chắc đã hội tụ. Thường khi gặp chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ trước hết ta xét tính hội tụ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Định lý 3.3. Nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Chứng minh: Gọi σ_n, S_n, S'_n, S''_n lần lượt là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n>0$ (chỉ tính tổng các u_n dương), $\sum_{n=1}^{\infty} -u_n$ với $u_n<0$ (chỉ tính tổng các u_n âm).

Ta dễ dàng có được $S_n=S'_n-S''_n$, theo giả thiết chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ nên tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Các dãy tổng riêng $\{S'_n\}$, $\{S''_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ nên hội tụ và $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n - \lim_{n\to\infty} S''_n$.

Ví dụ 3.8: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n^2}$, ta có $\left|\frac{sinn}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ 2}$ là chuỗi Riemann hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sinn}{n^2}\right|$ hội tụ vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n^2}$ hội tụ.

Định nghĩa 3.1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ, gọi là bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Chú ý:

i) Điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ là điều kiện đủ để $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ chứ không phải điều kiện cần. Có một số chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ, ví dụ như chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ nhưng $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right|$ phân kỳ, ta sẽ chứng minh sau.

ii) Nếu dùng qui tắc Cauchy hay D'Alambert mà chứng minh được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ, khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ vì $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$.

- Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu có dạng

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + \cdots + \cdots$$

trong đó $u_n > 0$.

Định lý 3.4. (Leibniz) Nếu chuỗi đan dấu có $\{u_n\}$ là dãy giảm và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi đan dấu hội tụ và có tổng $S<u_1$.

Chứng minh:

Nếu n là số chẵn, xét tổng riêng

$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$, ta có

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$

nên $\{S_{2n}\}$ là dãy số dương và

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_{5)} - \cdots - u_{2n}) < u_1$$

nên $\{S_{2n}\}$ là dãy số bị chặn trên nên $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < u_1$.

Nếu n là số lẻ, xét tổng riêng $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S.$$

Ví dụ 3.9:

a) Xét chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$

Chuỗi thỏa mãn định lý Leibniz nên chuỗi hội tụ.

b) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{n}$

Chuỗi có $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi phân kỳ.

3.2. Chuỗi lũy thừa

3.2.1. Chuỗi hàm

a) Định nghĩa

Chuỗi hàm là chuỗi mà các số hạng của nó là những hàm của biến độc lập x.

Xét chuỗi hàm:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (3.1)$$

Nếu cho x một giá trị x_0 nào đó, chuỗi *(3.1)* sẽ trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, với các giá trị x_0 khác nhau ta sẽ có các chuỗi số khác nhau. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ thì x_0 được gọi là điểm hội tụ, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kỳ thì x_0 được gọi là điểm phân kỳ.

Tập hợp các điểm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

Tổng

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad (3.2)$$

được gọi là tổng riêng thứ *n* của chuỗi *(3.1)*. Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ thì *S(x)* được gọi là tổng của chuỗi hàm *(3.1)*. Khi ấy ta nói chuỗi hàm *(3.1)* hội tụ về hàm *S(x)*.

Ví dụ 3.10:

Xét chuỗi hàm $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ đó là cấp số nhân vô hạn có công bội là *x*. Chuỗi hội tụ khi $|x|<1$, vậy chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ với $\forall x \in(-1,1)$ và có tổng $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Ta có thể nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ có miền hội tụ là (-1, 1).

b) Hội tụ, hội tụ đều

Định nghĩa 3.2. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ đều trên X nếu chuỗi hội tụ về $S(x)$ và với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n \geq n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Ví dụ 3.11: Xét chuỗi hàm

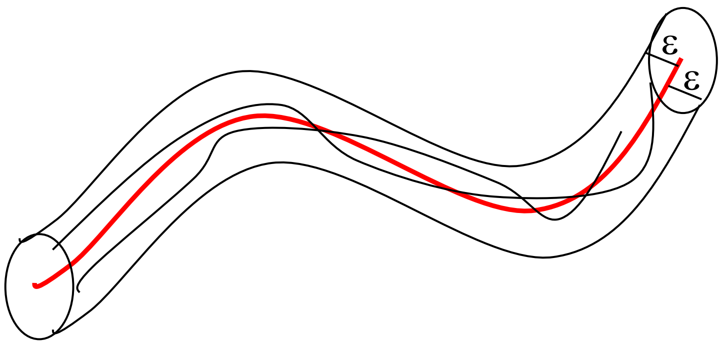
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

đây là một chuỗi đan dấu, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n} = 0$ nên chuỗi thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nên chuỗi hội tụ $\forall x\in\mathbb{R}$. Phần dư thứ *n* của chuỗi cũng là một chuỗi đan dấu nên có tổng về trị tuyệt đối bé thua trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên của nó, nghĩa là

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Nếu $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1$, do đó ta chỉ cần chọn $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$ thì $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ với mọi $n>n_0$. Với cách chọn như vậy rõ ràng n_0 không phụ thuộc vào $x\in \mathbb{R}$ nên chuỗi đang xét hội tụ đều.

Trong các bài toán kỹ thuật sự hội tụ đều có ý nghĩa rất lớn, ta hình dung một cách hình học rằng tổng của chuỗi $S(x)$ là một "*sợi dây*" mà với mọi ε bất kỳ ta luôn chỉ ra được một số n_0 nào đó mà với mọi $n>n_0$ thì đồ thị của $S_n(x)$ nằm gọn trong một đường ống với tâm là "*sợi dây*" với bán kính ε.



Hình 3.2

c) Tiêu chuẩn hội tụ đều

- Tiêu chuẩn Cauchy

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên *D* khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi *p*>*q*>*n₀* ta có

$$\left|S_p(x) - S_q(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

- Tiêu chuẩn Weierstrass

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu tồn tại chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $|u_n(x)| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên *D*.

Chứng minh:

Khi ta xét tại một giá trị *x* nào đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ trở thành chuỗi số dương, theo định lý so sánh ta dễ dàng thấy được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ hội tụ, có nghĩa chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối.

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ theo tiêu chuẩn Cauchy luôn tồn tại n_0 sao cho $\forall$ $p>q>n_0$:

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n < \varepsilon$$

Do đó $\left|S_p(x) - S_q(x)\right| = \left|u_{q+1}(x) + \cdots + u_p(x)\right| \le$
$\left|u_{q+1}(x)\right| + \cdots + \left|u_p(x)\right| \le a_{q+1} + \cdots + a_p < \varepsilon.$

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên *D* theo tiêu chuẩn Cauchy.

3.2.2. Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 3.3. Ta gọi chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm có dạng:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (3.3)$$

Định lý 3.5. (**Abel**) Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$hội tụ tại $x=x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$: $|x|<|x_0|$.

Thật vậy, chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x=x_0 \neq 0$ nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n {x_0}^n$ là chuỗi hội tụ nên số hạng tổng quát $a_n x_0^n$ dần đến 0 khi $n\to\infty$, do đó $a_n x_0^n$ bị chặn có nghĩa tồn tại $M > 0$ sao cho $|a_n x_0^n| \le M$ $\forall n$.

Ta có, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$, với $\left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M$,

khi $|x|<|x_0|$. Áp dụng định lý so sánh vào hai chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$ và

$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ta suy ra chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối tại mọi *x* thoả mãn $|x|<|x_0|$.

Từ định lý *(3.5)* dễ dàng nhận thấy nếu chuỗi luỹ thừa phân kỳ tại x_0 thì sẽ phân kỳ tại mọi *x* mà $|x|>|x_0|$.

Từ định lý *(3.5)* suy ra tồn tại một giá trị *R* ($R \ge 0$) sao cho chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối $\forall x \in (-R,R)$ và phân kỳ $\forall x \notin [-R,R]$, tại hai điểm -*R* và *R* chuỗi có thể hội tụ cũng có thể phân kỳ. Giá trị *R* đó được gọi là bán kính hội tụ, khoảng (-*R*,*R*) được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi. (R có thể bằng $+\infty$).

Qui tắc tìm bán kính hội tụ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) khi đó $R = \dfrac{1}{\rho}$. Chú ý rằng công thức được hiểu theo nghĩa suy rộng với $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, rõ ràng luôn tính được bán kính hội tụ với mọi ρ bất kỳ.

Ví dụ 3.12:

Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

Ta có $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow$ bán kính hội tụ *R=1*, chuỗi đã cho hội tụ trong khoảng (-1,1). Tại *x*=1 chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là một chuỗi phân kỳ theo dấu hiệu tích phân Cauchy. Tại *x*=-1chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ là một chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Leibniz. Miền hội tụ của chuỗi đã cho [-1,1).

Ví dụ 3.13:

Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

Ta có $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$ bán kính hội tụ R=∞, chuỗi đã cho hội $\forall x\in\mathbb{R}$.

3.2.3. Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

a) Khai triển Taylor

Giả sử hàm *f*(*x*) có đạo hàm mọi cấp tại x_0 và lân cận x_0 và có thể biểu diễn được thành tổng của một chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy, tức là

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0(x-x_0)^0+a_1(x-x_0)^1+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (3.4)$$

Trong khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa ta luôn có

$$\begin{cases} f'(x) & = & a_1 + 2a_2(x-x_0)^{2-1} + \ldots. + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots \\ f''(x) & = & 2!a_2 + \ldots.. \\ \ldots & & \\ f^{(n)}(x) & = & n!a_n + \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 & = & \dfrac{f(x_0)}{0!} \\ a_1 & = & \dfrac{f'(x_0)}{1!} \\ a_2 & = & \dfrac{f''(x_0)}{2!} \\ \ldots. & = & \ldots. \\ a_n & = & \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{cases}$$

Khi đó chuỗi luỹ thừa có thể viết lại:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (3.5)$$

Vế phải công thức *(3.5)* được gọi là chuỗi Taylor của hàm *f*(*x*) tại lân cận x_0.

Ví dụ 3.14:

Khai triển Taylor của hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0=1$.

Ta có:

$$f(x) = \frac{1}{x}\Big|_{x_0=1} = 1$$

$$f'(x) = -1.x^{-2}\Big|_{x_0=1} = -1$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n.n!\frac{1}{x^{n+1}}\Big|_{x_0=1} = (-1)^n.n!$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

b) Khai triển Mac Laurin

Khai triển công thức *(3.5)* tại x_0=0 ta được chuỗi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \cdots \quad (3.6)$$

được gọi là chuỗi Mac Laurin.

3.2.4. Khai triển 1 số hàm sơ cấp

Ví dụ 3.15: Khai triển các hàm sau thành chuỗi Mac Laurin

a) Khai triển hàm $f(x)=e^x$

Ta luôn có: $f(0)= f'(0) =f''(0)= ...... = f^{(n)}(0)= e^0=1$

vậy chuỗi Mac Laurin của hàm $f(x)=e^x$ có dạng:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

b) Khai triển hàm f(x)=cosx

Ta có:

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x)$ =-*cosx* $\Rightarrow f''(0)$ = -*cos0* =-1
$f^{(3)}(x)$ =*sinx* $\Rightarrow f^{(3)}(0)$ = *sin0* =0
$f^{(4)}(x)$ =*cosx* $\Rightarrow f^{(4)}(0)$ = *cos0* =1
....
Theo qui luật trên ta dễ dàng nhận thấy:

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ -1 & n=2(2k)\\ 1 & n=2(2k+1)\end{cases}\qquad k=0,1,2...$$

(Ta có thể nhận xét: các đạo hàm bậc lẻ thì bằng 0, các đạo hàm bậc chẵn thì đan dấu 1, -1).

$$\Rightarrow \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+..... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

c) Khai triển hàm f(x)=sinx

Ta có:
$f(x)$ =*sinx* $\Rightarrow f(0)$ = *sin0* =0
$f'(x)$ =*cosx* $\Rightarrow f'(0)$ = *cos0* =1
$f''(x)$ =-*sinx* $\Rightarrow f''(0)$ = -*sin0* =0
$f^{(3)}(x)$ =-*cosx* $\Rightarrow f^{(3)}(0)$ = -*cos0* =-1
$f^{(4)}(x)$ = *sinx* $\Rightarrow f^{(4)}(0)$ = *sin0* =0
....
Theo qui luật trên ta dễ dàng nhận thấy:

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k\\ -1 & n=2k+1\quad k=2q+1\\ 1 & n=2k+1\quad k=2q\end{cases}\qquad k=0,1,2...\quad q=0,1,2...$$

(Ta có thể nhận xét: các đạo hàm bậc chẵn thì bằng 0, các đạo hàm bậc lẻ thì đan dấu 1, -1).

$$\Rightarrow \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+..... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

d) Khai triển hàm f(x)=ln(1+x)

Ta có:
$f(x)$ = ln(1+x) $\Rightarrow f(0)$ = ln1 =0
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\Rightarrow f'(0)$ = 1
$f''(x)$ =(-1)(1+x)$^{-2}$ $\Rightarrow f''(0)$ = -1
$f^{(3)}(x)$ =$(-1)^2 2!(1+x)^{-3}$ $\Rightarrow f^{(3)}(0) = (-1)^2 2!$
....

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Vậy ta có hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Mac Laurin:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Công thức Euler

Khai triển Mac Laurin hàm $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$.

Nếu $z=x \in \mathbb{R}$ chính là khai triển Mac Laurin biến thực, nếu $z=ix \in \mathbb{C}$ ta có

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots$$

$$\Leftrightarrow e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$+ i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

$\Rightarrow e^{ix} = cosx + isinx.$

Dễ dàng ta có $e^{-ix} = cosx - isinx$, $\Rightarrow cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ và $sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$,

các công thức trên gọi là công thức *Euler*.

3.2.5. Ứng dụng tính gần đúng

Giả sử hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

khi đó với mọi x thuộc lân cận x_0, ta có thể xấp xỉ $f(x)$ bằng tổng riêng thứ n của chuỗi.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

vế phải là một đa thức đối với $(x-x_0)$. Việc tính toán trên đa thức rõ ràng dễ dàng hơn tính toán trên các hàm số khác. Phép tính gần đúng trên được đánh giá sai số bằng giá trị tuyệt đối của phần dư

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

với ξ thuộc lân cận x_0.

Ví dụ 3.16: Tính gần đúng $\sqrt[4]{e}$, với sai số nhỏ hơn $\varepsilon=0,0001$.

Giải:

Xét hàm $f(x)=e^x$, ta có

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

cho $x = \frac{1}{4}$ vậy *x* thuộc lân cận x_0=0. Vậy

$$e^{\frac{1}{4}} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{4} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{4^n} + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{1}{4^{n+1}}$ và ξ∈ (0,1/4), từ đó $R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\frac{1}{4^{n+1}}$.

Vấn đề đặt ra ta phải tìm *n* sao cho $|R_n(x)|<0{,}0001$?

Ta có $e^{\xi} < e^{1/4} < 3^{1/4} < 2$ và

$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\frac{1}{4^{n+1}} < 0{,}0001 \Leftrightarrow \frac{e^{\xi}}{0{,}0001} < (n+1)!\,4^{n+1} \Rightarrow \frac{2}{(n+1)!4^{n+1}} < 0{,}0001$.

Ta có thể thử trực tiếp để tìm *n*: *n*=3, $\frac{2}{(4)!4^4} = 0{,}0000108 < 0{,}0001$, điều đó có nghĩa chỉ cần tính tổng riêng đến *n*=3 thì phép tính gần đúng đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3.17: Tính gần đúng hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$, khai triển đến *n=2* và *x* thuộc lân cận x_0=8, đánh giá sai số với *x*∈ (7;9).

Giải:

Khai triển Taylor tại x_0=8

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

$f(x) = x^{1/3}, f(8) = 2;$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, f'(8) = \frac{1}{12};$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, f''(8) = -\frac{2}{288}.$

$f(x) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8) - \frac{1}{288}(x - 8)^2 + R_2(x).$

Với $R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - 8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{\frac{8}{3}}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81\xi^{\frac{8}{3}}}$, vì $|x-8|^3<1$ và $\xi > 7$ nên $\xi^{\frac{8}{3}} > 7^{\frac{8}{3}} > 179$.

Vậy, $R_2(x) = \frac{5(x-8)^3}{81\xi^{\frac{8}{3}}} < \frac{5.1}{81.179} < 0{,}004.$